

경영·경제분석을 위한 핵심 수학(6판)

연습문제 풀이 이용 안내

- 본 문제 풀이의 저작권은 원서 저작권자(Knut Sydsæter, Arne Strøm, Peter Hammond, Andrés Carvajal)와 Pearson, 한빛아카데미(주)에 있습니다.
- 이 자료를 무단으로 전제하거나 배포할 경우 저작권법 136조에 의거하여 최고 5년 이하의 징역 또는 5천만원 이하의 벌금에 처할 수 있고 이를 병과(併科)할 수도 있습니다.

CHAPTER 06 미분

6.1 곡선의 기울기

1.

$f(3) = 2$ 이다. 접선은 점 $(0, 3)$ 을 지나므로 기울기는 $-\frac{1}{3}$ 이다. 즉 $f'(3) = -\frac{1}{3}$ 이다.

2.

$$g(5) = 1, \quad g'(5) = 1$$

CHAPTER 06 미분

6.2 접선과 도함수

1.

$$f(5+h)-f(5)=4(5+h)^2-4\cdot 5^2=4(25+10h+h^2)-100=40h+4h^2$$

따라서 $h \rightarrow 0$ 일 때 $\frac{f(5+h)-f(5)}{h} \rightarrow 40$ 이다. 즉 $f'(5)=40$ 이다. $a=4$ 와 $b=c=0$ 일 때 식 (6.2.6)과 일치한다.

2.

(a) $f'(x)=6x+2$

(b) $f'(0)=2$, $f'(-2)=-10$, $f'(3)=20$, 접선의 방정식은 $y=2x-1$ 이다.

3.

$$\frac{dD(P)}{dP}=-b$$

4.

$$C'(x)=2qx$$

5.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\frac{x-(x+h)}{hx(x+h)}=\frac{-h}{hx(x+h)}=-\frac{1}{x(x+h)}$$

$$h \rightarrow 0 \text{일 때 } -\frac{1}{x(x+h)} \rightarrow -\frac{1}{x^2}$$

6.

(a) $f'(0)=3$

(b) $f'(1)=2$

(c) $f'(3)=-\frac{1}{3}$

(d) $f'(0)=-2$

(e) $f'(-1)=0$

(f) $f'(1)=4$

7.

$$(a) f(x+h)-f(x)=a(x+h)^2+b(x+h)+c-(ax^2+bx+c)=2ahx+bh+ah^2 \text{이다.}$$

따라서 $h \rightarrow 0$ 일 때 $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=2ax+b+ah \rightarrow 2ax+b$ 이다. 따라서 $f'(x)=2ax+b$ 이다.

(b) $x=-\frac{b}{2a}$ 일 때 $f'(x)=0$ 이다. 최솟값이나 최댓값에서는 접선이 x 축과 평행하다.

8.

$$f'(a)<0, f'(b)=0, f'(c)>0, f'(d)<0$$

9.

(a) 좌변을 전개하라.

(b) (a)에서 얻은 항등식을 정리하라.

(c) $h \rightarrow 0$ 일 때 이 공식을 얻을 수 있다. 참고로 $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ 이고 $\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}$ 이다.

10.

(a) $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

(b) 각각 $a=1$, $b=c=d=0$ 으로 두면 [EX 6.2.2]의 결과를 얻는다. 그런 다음 $a=0$ 으로 두면 [연습문제 7(a)]처럼 이 차식이 된다.

CHAPTER 06 미분

11.

$$h \rightarrow 0 \text{ 일 때 } \frac{(x+h)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}{h} = \frac{1}{(x+h)^{\frac{2}{3}} + (x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}} \rightarrow \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}} \text{ 이다. 그리고 } \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \text{ 이다.}$$

CHAPTER 06 미분

6.3 함수의 증가와 감소

1.

$f'(x) = 2x - 4$ 이므로 $(-\infty, 2]$ 에서 감소하고 $[2, \infty)$ 에서 증가한다.

2.

$f'(x) = -3x^2 + 8x - 1 = -3(x - x_0)(x - x_1)$ 이고, 여기서 $x_0 = \frac{1}{3}(4 - \sqrt{13}) \approx 0.13$, $x_1 = \frac{1}{3}(4 + \sqrt{13}) \approx 2.54$ 이다.

따라서 $f(x)$ 는 $(-\infty, x_0] \cup [x_1, \infty)$ 에서 감소하고 $[x_0, x_1]$ 에서 증가한다.

3.

중괄호 안의 식은 두 제곱의 합이므로 음수가 될 수 없다. 두 식 $x_1 + \frac{1}{2}x_2$ 와 x_2 가 모두 0일 때만 0이다. 이는

$x_1 = x_2 = 0$ 일 때만 성립한다. 따라서 $x_1 \neq x_2$ 이면 중괄호 안의 값은 항상 양수이고, 이때 $x_2^3 - x_1^3$ 의 부호는 $x_2 - x_1$ 의 부호와 같다. 따라서 f 는 순증가한다.

CHAPTER 06 미분

6.4 경제학에의 응용

1.

$$C'(100) = 203, \quad C'(x) = 2x + 3$$

2.

여기서 c 는 한계비용이며, 동시에 각 추가 단위를 생산하는 데 드는 (일정한) 증분비용이기도 하다. 한편 $\overline{C}$ 는 고정비용이다.

3.

$$(a) \quad S'(Y) = s$$

$$(b) \quad S'(Y) = 0.1 + 0.0004Y$$

4.

$T'(y) = t$ 이므로 한계세율은 상수이다.

5.

$x'(0) = -3$ 은 $t = 0$ 일 때의 추출 속도가 분당 3배럴이라는 뜻이다.

6.

$$(a) \quad C'(x) = 3x^2 - 180x + 7500$$

(b) 식 (4.6.3)에 따르면 이 이차함수 $C'(x) = 3x^2 - 180x + 7500$ 은 $x = 30$ 에서 최솟값을 갖는다.

7.

$$(a) \quad \pi'(Q) = 24 - 2Q, \quad Q^* = 12$$

$$(b) \quad R'(Q) = 500 - Q^2$$

$$(c) \quad C'(Q) = -3Q^2 + 428.4Q - 7900$$

8.

$$(a) \quad C'(x) = 2a_1x + b_1$$

$$(b) \quad C'(x) = 3a_1x^2$$

CHAPTER 06 미분

6.5 극한에 대한 소개

1.

- (a) 3 (b) $-\frac{1}{2}$
 (c) $13^3 = 2197$ (d) 40
 (e) 1 (f) $-\frac{3}{4}$

2.

- (a) 0.6931 (b) 1.0986
 (c) 0.4055

사실 [EX 7.12.2]의 결과를 이용하면 세 극한의 정확한 값은 각각 $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln \frac{3}{2}$ 이다.

3.

(a)

x	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1
$\frac{x^2 + 7x - 8}{x - 1}$	8.9	8.99	8.999	불능	9.001	9.01	9.1

(b) $x^2 + 7x - 8 = (x - 1)(x + 8)$ 이므로 $x \rightarrow 1$ 일 때 $\frac{x^2 + 7x - 8}{x - 1} = x + 8 \rightarrow 9$ 이다.

4.

- (a) 5 (b) $\frac{1}{5}$
 (c) 1 (d) -2
 (e) $3x^2$ (f) h^2

5.

- (a) $\frac{1}{6}$ (b) $-\infty$ (발산. 극한이 존재하지 않음)
 (c) 2 (d) $\frac{\sqrt{3}}{6}$
 (e) $-\frac{2}{3}$ (f) $\frac{1}{4}$

6.

- (a) 4 (b) 5
 (c) 6 (d) $2a + 2$
 (e) $2a + 2$ (f) $4a + 4$

7.

(a) $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ 이므로 극한은 $\frac{1}{6}$

(b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+h}-3}{h} = \lim_{u \rightarrow 3} \frac{u-3}{u^3-27}$ 이고 $u^3 - 27 = (u - 3)(u^2 + 3u + 9)$ 이므로 극한은 $\lim_{u \rightarrow 3} \frac{1}{u^2 + 3u + 9} = \frac{1}{27}$ 이다.

(c) $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$ 이므로 극한은 n 이다.

CHAPTER 06 미분

6.6 간단한 미분법칙

- 1.
- (a) 0 (b) $4x^3$
- (c) $90x^9$ (d) 0 (π 는 상수임을 상기하라)

- 2.
- (a) $2g'(x)$ (b) $-\frac{1}{6}g'(x)$
- (c) $\frac{1}{3}g'(x)$

- 3.
- (a) $6x^5$ (b) $33x^{10}$
- (c) $50x^{49}$ (d) $28x^{-8}$
- (e) x^{11} (f) $4x^{-3}$
- (g) $-x^{-\frac{4}{3}}$ (h) $3x^{-\frac{5}{2}}$

- 4.
- (a) $8\pi r$ (b) $A(b+1)y^b$
- (c) $-\frac{5}{2}A^{-\frac{7}{2}}$

- 5.
- 식 (6.2.1) 도함수의 정의에서 $h = x - a$ 로 두면, $a + h$ 는 x 로 바뀌고 $h \rightarrow 0$ 은 $x \rightarrow a$ 를 의미하게 된다. $f(x) = x^2$ 일 때는 $f'(a) = 2a$ 를 얻는다.

- 6.
- 모든 경우에 C 는 임의의 상수이다.

- (a) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$ (b) $F(x) = x^2 + 3x + C$
- (c) $F(x) = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$

- 7.
- (a) $f(x) = x^2$ 이고 $a = 5$ 일 때 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(5+h)^2 - 5^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) = f'(5)$ 이다. 반면에 $f'(x) = 2x$ 이므로 $f'(5) = 10$ 이고 극한은 10이다.
- (b) $f(x) = x^5$ 이라 하면 $f'(x) = 5x^4$ 이고 극한은 $f'(1) = 5 \cdot 1^4 = 5$ 이다.
- (c) $f(x) = 5x^2 + 10$ 이라 하면 $f'(x) = 10x$ 이고 이 값이 극한값이다.

CHAPTER 06 미분

6.7 합, 곱, 몫의 도함수

1.

(a) 1

(b) $1 + 2x$

(c) $15x^4 + 8x^3$

(d) $32x^3 + x^{-\frac{1}{2}}$

(e) $\frac{1}{2} - 3x + 15x^2$

(f) $-21x^6$

2.

(a) $\frac{6}{5}x - 14x^6 - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

(b) $4x(3x^4 - x^2 - 1)$

(c) $10x^9 + 5x^4 + 4x^3 - x^{-2}$

(b)와 (c)는 먼저 전개한 뒤에 미분한다.

3.

(a) $-6x^{-7}$

(b) $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$

(c) $-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$

(d) $\frac{-2}{(x-1)^2}$

(e) $-4x^{-5} - 5x^{-6}$

(f) $\frac{34}{(2x+8)^2}$

(g) $-33x^{-12}$

(h) $\frac{-3x^2 + 2x + 4}{(x^2 + x + 1)^2}$

4.

(a) $\frac{3}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$

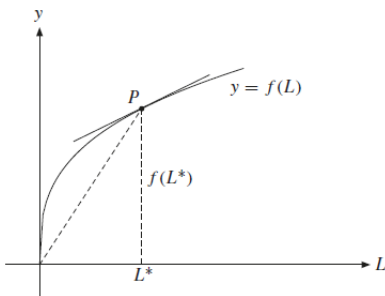
(b) $\frac{4x}{(x^2+1)^2}$

(c) $\frac{-2x^2+2}{(x^2-x+1)^2}$

5.

(a) $f'(L^*) < \frac{f(L^*)}{L^*} = g(L^*)$ 이다. [그림 A6.7.5]를 보라. 점 P 에서 접선의 기울기는 $f'(L^*)$ 이다. 눈으로 보면 점 P

에서의 접선은 원점에서 P 까지 이은 직선보다는 덜 가파르다. 이 직선의 기울기는 $\frac{f(L^*)}{L^*} = g(L^*)$ 이다. 참고로 이 부등식은 식 (8.4.3)에 나오는 미분가능한 오목함수의 성질에서 바로 따라나온다.



[그림 A6.7.5]

CHAPTER 06 미분

(b) $\frac{d}{dL}\left(\frac{f(L)}{L}\right) = \frac{1}{L}\left\{f'(L) - \frac{f(L)}{L}\right\}$ 이다. [EX 6.7.7]과 같다.

6.

(a) $[2, \infty)$

(b) $[-\sqrt{3}, 0], [\sqrt{3}, \infty)$

(c) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

(d) $\left(-\infty, \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{5})\right], \left[0, \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})\right]$

7.

(a) $y = -3x + 4$

(b) $y = x - 1$

(c) $y = \frac{17x - 19}{4}$

(d) $y = -\frac{x - 3}{9}$

8.

$\dot{R}(t) = \dot{p}(t)x(t) + p(t)\dot{x}(t)$ 이다. 여기서 $R(t)$ 는 두 가지 이유로 증가한다. 첫째, 가격이 상승하기 때문에 $R(t)$ 가 증가한다. 이 증가분은 석유 생산량 $x(t)$ 에 비례하며, 그 값은 $\dot{p}(t)x(t)$ 이다. 하지만 $R(t)$ 는 석유 생산량이 증가함에 따라 서도 증가한다. 이 증가분은 가격 $p(t)$ 에 비례하며, 그 값은 $p(t)\dot{x}(t)$ 이다. 결국 $R(t)$ 의 총 변화율 $\dot{R}(t)$ 는 이 두 부분의 합이다.

9.

(a) $\frac{ad - bc}{(ct + d)^2}$

(b) $a\left(n + \frac{1}{2}\right)t^{n - \frac{1}{2}} + nbt^{n-1}$

(c) $-\frac{2at + b}{(at^2 + bt + c)^2}$

10.

곱의 도함수 법칙에 의해 $f'(x) \cdot f(x) + f(x) \cdot f'(x) = 1$ 이므로 $2f'(x) \cdot f(x) = 1$ 이다.

따라서 $f'(x) = \frac{1}{2}f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ 이다.

11.

$f(x) = \frac{1}{x^n}$ 이면 몫의 도함수 법칙에 의해 $f'(x) = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot nx^{n-1}}{(x^n)^2} = -nx^{-n-1} = ax^{a-1}$ 이다. 이것이 거듭제곱함수의 미분법칙이다.

CHAPTER 06 미분

6.8 연쇄법칙

1.

$$(a) \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = 20y^{4-1} \frac{dy}{dx} = 20(1+x^2)^3 2x = 40x(1+x^2)^3$$

$$(b) \frac{dz}{dx} = (1-6y^5) \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} \left\{ 1-6 \left(1+\frac{1}{x} \right)^5 \right\}$$

2.

$$(a) \frac{dY}{dt} = \frac{dY}{dV} \frac{dV}{dt} = -(-3)5(V+1)^4 t^2 = -15t^2 \left(\frac{t^3}{3} + 1 \right)^4$$

$$(b) \frac{dK}{dt} = \frac{dK}{dL} \frac{dL}{dt} = AaL^{a-1}b = Aab(bt+c)^{a-1}$$

3.

$$(a) y' = -5(x^2+x+1)^{-6}(2x+1)$$

$$(b) y' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \left\{ 1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right\}$$

$$(c) y' = x^{a-1}(px+q)^{b-1}\{(a+b)px+aq\}$$

4.

$$\left(\frac{dY}{dt} \right)_{t=t_0} = \left(\frac{dY}{dK} \right)_{t=t_0} \cdot \left(\frac{dK}{dt} \right)_{t=t_0} = Y'(K(t_0)) \cdot K'(t_0)$$

5.

$$\frac{dY}{dt} = F'(h(t)) \cdot h'(t)$$

6.

$$x = b - \sqrt{ap-c} = b - \sqrt{u} \text{ 이고 } u = ap-c \text{ 이다. 따라서 } \frac{dx}{dp} = -\frac{1}{2\sqrt{u}}u' = -\frac{a}{2\sqrt{ap-c}} \text{ 이다.}$$

7.

$$(a) h'(x) = f'(x^2) \cdot 2x$$

$$(b) h'(x) = g'(x^n f(x)) \cdot x^{n-1}\{nf(x) + xf'(x)\}$$

8.

$b(t)$ 는 t 시간 후의 총 연료 소모량이다. 그러면 $b'(t) = B'(s(t)) \cdot s'(t)$ 이고, 따라서 시간당 연료 소모율은 킬로미터 당 소모율에 속도(kph)를 곱한 것과 같다.

9.

$$\frac{dC}{dx} = q \left(25 - \frac{1}{2}x \right)^{-\frac{1}{2}}$$

10.

$$(a) y' = 5(x^4)^4 \cdot 4x^3 = 20x^{19}$$

$$(b) y' = 3(1-x)^2(-1) = -3 + 6x - 3x^2$$

11.

(a) ❶ $g(5)$ 는 이자율이 연 5%일 때 누적되는 금액을 의미하며, 이는 약 1,629유로이다.

❷ $g'(5)$ 는 이자율이 1%포인트 증가할 때 누적 금액이 얼마나 증가하는지를 나타내며, 약 155유로이다.

CHAPTER 06 미분

(b) $g(p) = 1000 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{10}$ 이므로 $g(5) = 1000 \cdot 1.05^{10} = 1628.89$ 이다(1센트 단위 반올림).

$$g'(p) = 1000 \cdot 10 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^9 \cdot \frac{1}{100} \text{ 이므로 } g'(5) = 100 \cdot 10.5^9 = 155.13 \text{ 이다(1센트 단위 반올림).}$$

12.

(a) $1 + f'(x)$

(b) $2f(x)f'(x) - 1$

(c) $4\{f(x)\}^3 f'(x)$

(d) $2xf(x) + x^2 f'(x) + 3\{f(x)\}^2 f'(x)$

(e) $f(x) + xf'(x)$

(f) $\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

(g) $\frac{2xf(x) - x^2 f'(x)}{\{f(x)\}^2}$

(h) $\frac{2xf(x)f'(x) - 3\{f(x)\}^2}{x^4}$

13.

(a) $x \neq 0$ 이고 $0 < |h| < |x|$ 일 때, 다음이 성립한다.

$$\frac{1}{h} \{\phi(x+h) - \phi(x)\} = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) = \frac{-h}{h(x+h)x} = \frac{-1}{(x+h)x}$$

이는 $h \rightarrow 0$ 일 때 $-\frac{1}{x^2}$ 로 수렴한다. 특히 $\phi(x) = \frac{1}{x}$ 은 $x \neq 0$ 일 때 미분가능하다.

(b) 어떤 x 에 대해 $g(x) \neq 0$ 이고, f 와 g 가 x 에서 미분가능하다고 하자.

❶ (a)와 연쇄법칙을 결합하면 $\frac{1}{g(x)} = \phi(g(x))$ 는 x 에서 미분가능하다.

❷ 곱의 도함수 법칙에 따라 $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ 는 x 에서 미분가능하다.

CHAPTER 06 미분

6.9 고계도함수

1.

(a) $y'' = 20x^3 - 36x^2$ (b) $y'' = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$

(c) $y' = 20x(1+x^2)^9$ 이므로 $y'' = 20(1+x^2)^9 + 20x \cdot 9 \cdot 2x(1+x^2)^8 = 20(1+x^2)^8(1+19x^2)$ 이다.

2.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

3.

(a) $y'' = 18x$ (b) $Y''' = 36$
(c) $\frac{d^3z}{dt^3} = -2$ (d) $f^{(4)}(1) = 84000$

4.

$$g'(t) = \frac{2t(t-1)-t^2}{(t-1)^2} = \frac{t^2-2t}{(t-1)^2}, \quad g''(t) = \frac{2}{(t-1)^3} \text{이므로 } g''(2) = 2 \text{이다.}$$

5.

표기법을 단순하게 하면

$$\begin{aligned} y' &= f'g + fg' \\ y'' &= f''g + f'g' + f'g' + fg'' = f''g + 2f'g' + fg'' \\ y''' &= f'''g + f''g' + 2f''g' + 2f'g'' + f'g'' + fg''' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg''' \end{aligned}$$

6.

$$L = (2t-1)^{-\frac{1}{2}} \text{이므로 } \frac{dL}{dt} = -\frac{1}{2} \cdot 2(2t-1)^{-\frac{3}{2}} = -(2t-1)^{-\frac{3}{2}} \text{이고 } \frac{d^2L}{dt^2} = 3(2t-1)^{-\frac{5}{2}} \text{이다.}$$

7.

(a) $R = 0$ (b) $R = \frac{1}{2}$
(c) $R = 3$ (d) $R = \rho$

8.

국방부 장관 : $P' < 0$, 그레이 의원: $P' \geq 0$, $P'' < 0$

9.

$$\frac{d^3L}{dt^3} > 0$$

CHAPTER 06 미분

6.10 지수함수 미분법

1.

(a) $y' = e^x + 2x$

(b) $y' = 5e^x - 9x^2$

(c) $y' = \frac{1 \cdot e^x - xe^x}{e^{2x}} = (1-x)e^{-x}$

(d) $y' = \frac{(1+2x)(e^x+1) - (x+x^2)e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{1+2x+e^x(1+x-x^2)}{(e^x+1)^2}$

(e) $y' = -1 - e^x$

(f) $y' = x^2e^x(3+x)$

(g) $y' = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$

(h) $y' = 2(x+e^x)(1+e^x)$

2.

(a) $\frac{dx}{dt} = (b+2ct)e^t + (a+bt+ct^2)e^t = \{a+b+(b+2c)t+ct^2\}e^t$

(b) $\frac{dx}{dt} = \frac{3qt^2te^t - (p+qt^3)(1+t)e^t}{t^2e^{2t}} = \frac{-qt^4+2qt^3-pt-p}{t^2e^t}$

(c) $\frac{dx}{dt} = \frac{2(at+bt^2)(a+2bt)e^t - (at+bt^2)^2e^t}{(e^t)^2} = [t(a+bt)\{-bt^2+(4b-a)t+2a\}]e^{-t}$

3.

(a) $y' = -3e^{-3x}, y' = 9e^{-3x}$

(b) $y' = 6x^2e^{x^3}, y'' = 6xe^{x^3}(3x^3+2)$

(c) $y' = -x^{-2}e^{\frac{1}{x}}, y'' = x^{-4}e^{\frac{1}{x}}(2x+1)$

(d) $y' = 5(4x-3)e^{2x^2-3x+1}, y'' = 5e^{2x^2-3x+1}(16x^2-24x+13)$

4.

(a) $(-\infty, \infty)$ (b) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

(c) $(-\infty, -1] \cup [0, 1]$

5.

(a) $y' = 2xe^{-2x}(1-x)$ 이므로 y 는 $[0, 1]$ 에서 증가한다.

(b) $y' = e^x(1-3e^{2x})$ 이므로 y 는 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\ln 3\right]$ 에서 증가한다.

(c) $y' = \frac{(2x+3)e^{2x}}{(x+2)^2}$ 이므로 y 는 $\left[-\frac{3}{2}, \infty\right)$ 에서 증가한다.

CHAPTER 06 미분

6.

(a) $e^{e^x} e^x = e^{e^x + x}$

(b) $\frac{1}{2} \left(e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}} \right)$

(c) $-\frac{e^t - e^{-t}}{(e^t + e^{-t})^2}$

(d) $z^2 e^{z^3} (e^{z^3} - 1)^{-\frac{2}{3}}$

7.

(a) $y' = 5^x \ln 5$

(b) $y' = 2^x + x 2^x \ln 2 = 2^x (1 + x \ln 2)$

(c) $y' = 2x 2^{x^2} (1 + x^2 \ln 2)$

(d) $y' = e^x 10^x + e^x 10^x \ln 10 = e^x 10^x (1 + \ln 10)$

CHAPTER 06 미분

6.11 로그함수 미분법

1.

$$(a) y' = \frac{1}{x} + 3, y'' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(b) y' = 2x - \frac{2}{x}, y'' = 2 + \frac{2}{x^2}$$

$$(c) y' = 3x^2 \ln x + x^2, y'' = x(6 \ln x + 5)$$

$$(d) y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}, y'' = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$$

2.

$$(a) y' = x^2 \ln x (3 \ln x + 2)$$

$$(b) y' = \frac{x(2 \ln x - 1)}{(\ln x)^2}$$

$$(c) y' = \frac{10(\ln x)^9}{x}$$

$$(d) y' = \frac{2 \ln x}{x} + 6 \ln x + 18x + 6$$

3.

$$(a) \frac{1}{x \ln x}$$

$$(b) \frac{-x}{1 - x^2}$$

$$(c) e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right)$$

$$(d) e^{x^3} \left(3x^2 \ln x^2 + \frac{2}{x} \right)$$

$$(e) \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$(f) \frac{2x + 3}{x^2 + 3x - 1}$$

$$(g) \frac{-2e^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$(h) (4x - 1)e^{2x^2 - x}$$

4.

$$(a) x > -1$$

$$(b) \frac{1}{3} < x < 1$$

$$(c) x \neq 0$$

5.

$$(a) |x| > 1$$

$$(b) x > 1$$

$$(c) x \neq e^e, x > 1$$

6.

$$(a) y \text{ 는 } (-2, 2) \text{ 에서 정의되고 } y' = \frac{-8x}{4 - x^2} > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ 이다. 따라서 } y \text{ 는 } (-2, 0] \text{ 에서 증가한다.}$$

$$(b) y \text{ 는 } x > 0 \text{ 에서 정의되고 } y' = x^2(3 \ln x + 1) > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3} \text{ 이다. 따라서 } y \text{ 는 } \left[e^{-\frac{1}{3}}, \infty \right) \text{ 에서 증가한다.}$$

$$(c) y \text{ 는 } x > 0 \text{ 에서 정의되고 } y' = \frac{(1 - \ln x)(\ln x - 3)}{2x^2} > 0 \Leftrightarrow \ln x < 3 \text{ 이다. 따라서 } y \text{ 는 } [e, e^3] \text{ 에서 증가한다.}$$

7.

$$(a) x \text{ 좌표가 } 1, \frac{1}{2}, e \text{ 인 점에서 접선의 방정식은 각각 } y = x - 1, y = 2x - 1 - \ln 2, y = \frac{x}{e} \text{ 이다.}$$

$$(b) x \text{ 좌표가 } 0, 1, -2 \text{ 인 점에서 접선의 방정식은 각각 } y = x, y = 2ex - e, y = -e^{-2}x - 4e^{-2} \text{ 이다.}$$

8.

$$(a) \frac{f'(x)}{f(x)} = 2 \ln x + 2$$

CHAPTER 06 미분

(b) $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2x-4} + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{4x^3}{x^4+6}$

(c) $\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{2}{3(x^2-1)}$

9.

(a) $(2x)^x (1 + \ln 2 + \ln x)$ (b) $x^{\sqrt{x} - \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \ln x + 1 \right)$

(c) $\frac{1}{2} (\sqrt{x})^x (\ln x + 1)$

10.

$\ln y = v \ln u$ 라 두면 $\frac{y'}{y} = v' \ln u + v \frac{u'}{u}$ 이다. 따라서 $y' = u^v \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right)$ 이다. 또는 $y = (e^{\ln u})^v = e^{v \ln u}$ 로 두고 연쇄법칙을 써도 된다.

11.

(a) $f(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 \right)$ 이라 하자. 그러면 $f(0) = 0$ 이고 모든 $x > 0$ 에 대해 $f'(x) = e^x - (1 + x) > 0$ 이다. 이는 연습문제에서 보인 것과 같다. 따라서 모든 $x > 0$ 에 대해 $f(x) > 0$ 이고, 부등식이 성립한다.

(b) 두 함수 $f_1(x) = \ln(1+x) - \frac{1}{2}x$ 와 $f_2(x) = x - \ln(1+x)$ 를 생각하라. 자세한 내용은 [Student Manual] 참고.

(c) 함수 $g(x) = 2(\sqrt{x} - 1) - \ln x$ 를 생각하라. 자세한 내용은 [Student Manual] 참고.

CHAPTER 06 미분

CHAPTER 06 복습문제

6.1

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - (x+h) + 2 - x^2 + x - 2}{h} = \frac{2xh + h^2 - h}{h} = 2x + h - 1 \text{이다.}$$

$$h \rightarrow 0 \text{일 때 } \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \rightarrow 2x-1 \text{이므로 } f'(x) = 2x-1 \text{이다.}$$

6.2

$$h \rightarrow 0 \text{일 때 } \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -6x^2 + 2x - 6xh - 2h^2 + h \rightarrow -6x^2 + 2x \text{이므로 } f'(x) = -6x^2 + 2x \text{이다.}$$

6.3

$$(a) y' = 2, y'' = 0$$

$$(b) y' = 3x^8, y'' = 24x^7$$

$$(c) y' = -x^9, y'' = -9x^8$$

$$(d) y' = 21x^6, y'' = 126x^5$$

$$(e) y' = \frac{1}{10}, y'' = 0$$

$$(f) y' = 5x^4 + 5x^{-6}, y'' = 20x^3 - 30x^{-7}$$

$$(g) y' = x^3 + x^2, y'' = 3x^2 + 2x$$

$$(h) y' = -x^{-2} - 3x^{-4}, y'' = 2x^{-3} + 12x^{-5}$$

6.4

$C'(1000) \approx C(1001) - C(1000)$ 이므로 $C'(1000) = 25$ 일 때 1000단위보다 약간 더 많이 생산했을 때의 추가 비용은 단위당 대략 25이다. 단위당 가격이 30으로 고정되어 있다면, 생산량을 1000단위보다 조금 늘렸을 때의 추가 이윤은 단위당 대략 $30 - 25 = 5$ 이다.

6.5

$$(a) y = -3 \text{이고 } x = 1 \text{에서 } y' = -6x = -6 \text{이므로 } y - (-3) = (-6)(x - 1) \text{ 즉 } y = -6x + 3 \text{이다.}$$

$$(b) y = -14 \text{이고 } x = 4 \text{에서 } y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2x = -\frac{31}{4} \text{이므로 } y = -\frac{31}{4}x + 17 \text{이다.}$$

$$(c) y = 0 \text{이고 } y' = \frac{-2x^3 - 8x^2 + 6x}{(x+3)^2} = -\frac{1}{4} \text{이므로 } y = -\frac{1}{4}(x-1) \text{이다.}$$

6.6

면적을 100m^2 에서 조금 늘릴 때의 추가 비용은 대략 m^2 당 250달러이다.

6.7

$$(a) f(x) = x^3 + x \text{이므로 } f'(x) = 3x^2 + 1$$

$$(b) g'(w) = -5w^{-6}$$

$$(c) h(y) = y(y^2 - 1) = y^3 - y \text{이므로 } h'(y) = 3y^2 - 1$$

$$(d) G'(t) = \frac{-2t^2 - 2t + 6}{(t^2 + 3)^2}$$

$$(e) \phi'(\xi) = \frac{4 - 2\xi^2}{(\xi^2 + 2)^2}$$

$$(f) F'(s) = -\frac{s^2 + 2}{(s^2 + s - 2)^2}$$

6.8

$$(a) 2at$$

$$(b) a^2 - 2t$$

$$(c) 2x\phi - \frac{1}{2}\sqrt{\phi}$$

CHAPTER 06 미분

6.9

$$(a) \quad \frac{dy}{dx} = 20(5 - x^2)(-2x) = 40x^3 - 200x$$

$$(b) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x}-1}} \left(\frac{1}{x} - 1 \right)' = \frac{-1}{2x^2\sqrt{\frac{1}{x}-1}}$$

6.10

$$(a) \quad \frac{dZ}{dt} = \frac{dZ}{du} \frac{du}{dt} = 3(u^2 - 1)^2 2u 3t^2 = 18t^5 (t^6 - 1)^2$$

$$(b) \quad \frac{dK}{dt} = \frac{dK}{dL} \frac{dL}{dt} = \left(\frac{1}{2\sqrt{L}} \right) \left(-\frac{1}{t^2} \right) = \frac{-1}{2t^2\sqrt{1+\frac{1}{t}}}$$

6.11

$$(a) \quad \frac{\dot{x}}{x} = \frac{2\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \qquad (b) \quad \frac{\dot{x}}{x} = \frac{\alpha\dot{a}}{a} + \frac{\beta\dot{b}}{b}$$

$$(c) \quad \frac{\dot{x}}{x} = \frac{(\alpha + \beta)(\alpha a^{\alpha-1}\dot{a} + \beta b^{\beta-1}\dot{b})}{a^\alpha + b^\beta}$$

6.12

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{dS} \frac{dS}{dK} \frac{dK}{dt} = \alpha S^{\alpha-1} \beta \gamma K^{\gamma-1} A p t^{p-1} = A \alpha \beta \gamma p t^{p-1} S^{\alpha-1} K^{\gamma-1}$$

6.13

$$(a) \quad h'(L) = apL^{a-1}(L^a + b)^{p-1} \qquad (b) \quad C'(Q) = a + 2bQ$$

$$(c) \quad P'(x) = ax^{\frac{1}{q}-1}(ax^{\frac{1}{q}} + b)^{q-1}$$

6.14

$$(a) \quad y' = -7e^x \qquad (b) \quad y' = -6xe^{-3x^2}$$

$$(c) \quad y' = xe^{-x}(2-x) \qquad (d) \quad y' = e^x \left\{ \ln(x^2 + 2) + \frac{2x}{x^2 + 2} \right\}$$

$$(e) \quad y' = 15x^2e^{5x^3} \qquad (f) \quad y' = x^3e^{-x}(x-4)$$

$$(g) \quad y' = 10(e^x + 2x)(e^x + x^2)^9 \qquad (h) \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$

6.15

$$(a) \quad [1, \infty) \qquad (b) \quad [0, \infty)$$

$$(c) \quad (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$$

6.16

$$(a) \quad \frac{d\pi}{dQ} = P(Q) + QP'(Q) - c \qquad (b) \quad \frac{d\pi}{dL} = PF'(L) - w$$